16 февраля 2019 г.

Метод рационализации при решении уравнений и неравенств с модулем.

- Лицей научно-инженерного профиля
- г. Королёв

- Подготовка к ЕГЭ

- Учитель математики:
- Круглова Наталья Вячеславовна

Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля:

1) $|x| \geq 0;$

2) $|-x| = x,$

$|x - y| = |y - x|;$

3) $|x^2| = |x|^2 = |-x|^2 = x^2,$

$|x|^{2k} = x^{2k};$

4) $|cx| = c|x|, \ c > 0;$

5) $\sqrt{x^2} = |x|;$

6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$

7) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \ y \neq 0.$

Подготовка к ЕГЭ

Неравенство треугольника:

$$|x+y| \le |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y \ge 0;$$

$$|x-y| \ge |x| - |y| \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y \ge 0,\ |x| \ge |y|.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$|a-b| \le |a-c| + |c-b|,$$

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n|.$$

Подготовка к ЕГЭ

Равносильные переходы:

Важно знать:

1. $$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right. \end{cases}$$

2. $$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right.$$

3. $$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

4. $$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right.$$

5. $$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2;$$

6. $$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big) \cdot \big(f(x) + g(x)\big) = 0;$$

7. $$|f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big) \cdot \big(f(x) + g(x)\big) \vee 0;$$

Подготовка к ЕГЭ

Дополнительные равносильные переходы:

8. $$|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$$

9. $$|f(x)|+|g(x)|=f(x)-g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\leq 0; \end{cases}$$

10. $$|f(x)|+|g(x)|=-f(x)+g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$$

11. $$|f(x)|+|g(x)|=-f(x)-g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\leq 0; \end{cases}$$

ЕГЭ - 2019

Дополнительные свойства модуля:

12. $$|f(x)|+|g(x)|=|f(x)+g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\cdot g(x)\geq 0;$$

13. $$|f(x)|+|g(x)|=|f(x)-g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\cdot g(x)\leq 0;$$

14. $$|f(x)|+|g(x)|+|h(x)|=|f(x)+g(x)-h(x)|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ h(x)\leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\leq 0 \\ h(x)\geq 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Подготовка к ЕГЭ

Пример №1

Решить неравенство: $\boxed{|x-6| > |x^2-5x+9|.}$

Решение: Неравенство имеет вид

$$\boxed{|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x)-g(x))\cdot(f(x)+g(x)) > 0;}$$

Исходное неравенство равносильно неравенству

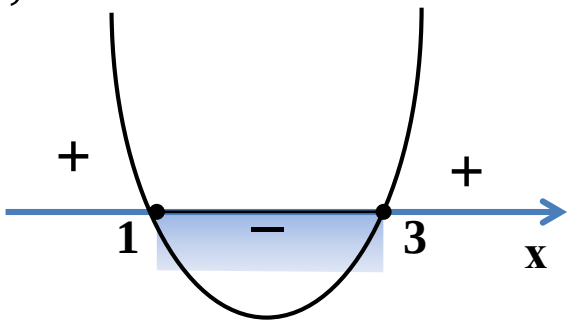
$$((x-6)-(x^2-5x+9))((x-6)+(x^2-5x+9)) > 0,$$

$$(x-6-x^2+5x-9)(x-6+x^2-5x+9) > 0,$$

$$(-x^2+6x-15)(x^2-4x+3) > 0,$$

$$(x^2-6x+15)(x^2-4x+3) < 0,$$

$D < 0$ $\quad$ $x = 1$ $\quad$ $x = 3$



$\Rightarrow$ $1 < x < 3$

Ответ: $\boxed{(1;3)}$

Подготовка к ЕГЭ

Пример №2

Решить уравнение:

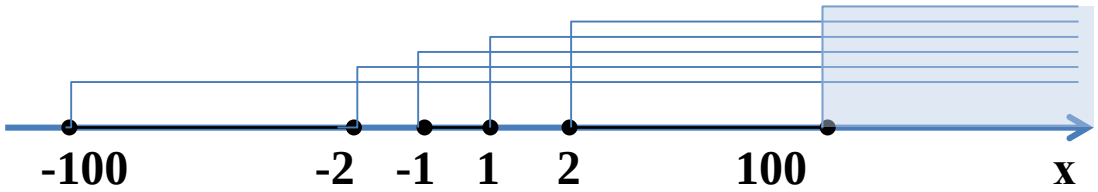
$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\ldots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

Решение:

Уравнение имеет вид $|f_1|+|f_2|+|f_3|+\ldots+|f_n|=f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n$

уравнение справедливо, если

$$\begin{cases} f_1 \ge 0, \\ f_2 \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ x-2 \ge 0, \\ x+2 \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x-100 \ge 0, \\ x+100 \ge 0; \end{cases}$$



$$x \ge 100$$

Ответ: $[100;+\infty)$.

Подготовка к ЕГЭ

Пример №3

Решить уравнение: $\boxed{\left|2^x-7\right|+\left|x^2-6x-7\right|=\left|2^x-x^2+6x\right|.}$

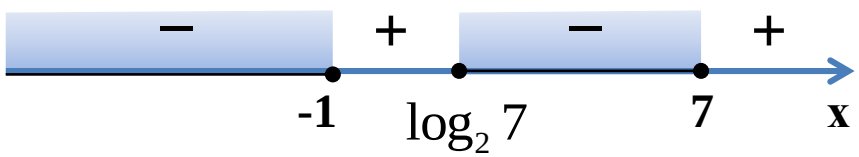
Решение:

Т.к. $(2^x-7)-(x^2-6x-7)=2^x-x^2+6x,$

Уравнение имеет вид $\boxed{|f|+|g|=|f-g|}$

и равносильно неравенству $f\cdot g\le 0,$ т.е.

$$\left(2^x-7\right)\left(x^2-6x-7\right)\le 0$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ \log_2 7\le x\le 7; \end{array}\right.$$

Ответ: $\boxed{(-\infty;-1]\cup[\log_2 7;7].}$

Подготовка к ЕГЭ

Пример №4

Решить уравнение: $\boxed{\left|\log_{\frac{4}{x}} 2\right| + \left|\log_x 2\right| = \log_{\frac{x}{4}} 2 + \log_x 2.}$

Решение: $\left|\log_{\frac{4}{x}} 2\right| + \left|\log_x 2\right| = \log_{\frac{x}{4}} 2 + \log_x 2.$

Уравнение имеет вид $\boxed{|f(x)| + |g(x)| = f(x) - g(x)}$, которое равносильно системе $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \le 0; \end{cases}$ *где* $f(x) = \log_x 2;\ \ g(x) = \log_{\frac{4}{x}} 2.$

$$\begin{cases} \log_x 2 \ge 0, \\ \log_{\frac{4}{x}} 2 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-1)\cdot(x-1) \ge 0, \\ (2-1)\cdot\left(\dfrac{4}{x} - 1\right) \le 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1,\ x \ne 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ \dfrac{4-x}{x} \le 0, \\ x > 0, \\ x \ne 1,\ x \ne 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > 4; \end{cases}$$

Ответ: $(4; +\infty)$

Подготовка к ЕГЭ

Пример №5

Решить неравенство: $\left|x^3-2x^2-3x\right|+\left|x^2+4x-5\right|\le\left|x^3-x^2+x-5\right|.$

Решение: Неравенство имеет вид $|a|+|b|\le|a+b|$, где $a=x^3-2x^2-3x$

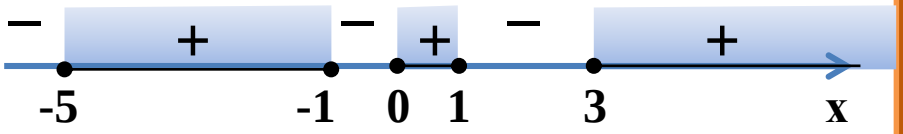
$b=x^2+4x-5.$

С другой стороны, известно неравенство треугольника $|a|+|b|\ge|a+b|.$

$\boxed{|a|+|b|=|a+b|}$, которое справедливо при условии $\boxed{ab\ge 0.}$

$$\left(x^3-2x^2-3x\right)\left(x^2+4x-5\right)\ge 0$$

$$x(x+1)(x-3)(x-1)(x+5)\ge 0.$$



Ответ: $\boxed{[-5;-1]\cup[0;1]\cup[3;+\infty).}$

Подготовка к ЕГЭ

Пример №6

При каких значениях параметра а уравнение $\boxed{a^2\left|a+\frac{x}{a^2}\right|+|1+x|=1-a^3}$

имеет не менее четырех целых решений ?

Решение: $a^2\left|a+\frac{x}{a^2}\right|+|1+x|=1-a^3 \quad \Leftrightarrow \quad |a^3+x|+|1+x|=1-a^3.$

Уравнение имеет вид $\boxed{|f(x)|+|g(x)|=f(x)-g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\le 0; \end{cases}$

где $f(x)=1+x,$

$g(x)=a^3+x,$

$f(x)-g(x)=1+x-a^3-x=1-a^3.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x\ge 0, \\ a^3+x\le 0; \end{cases}$$

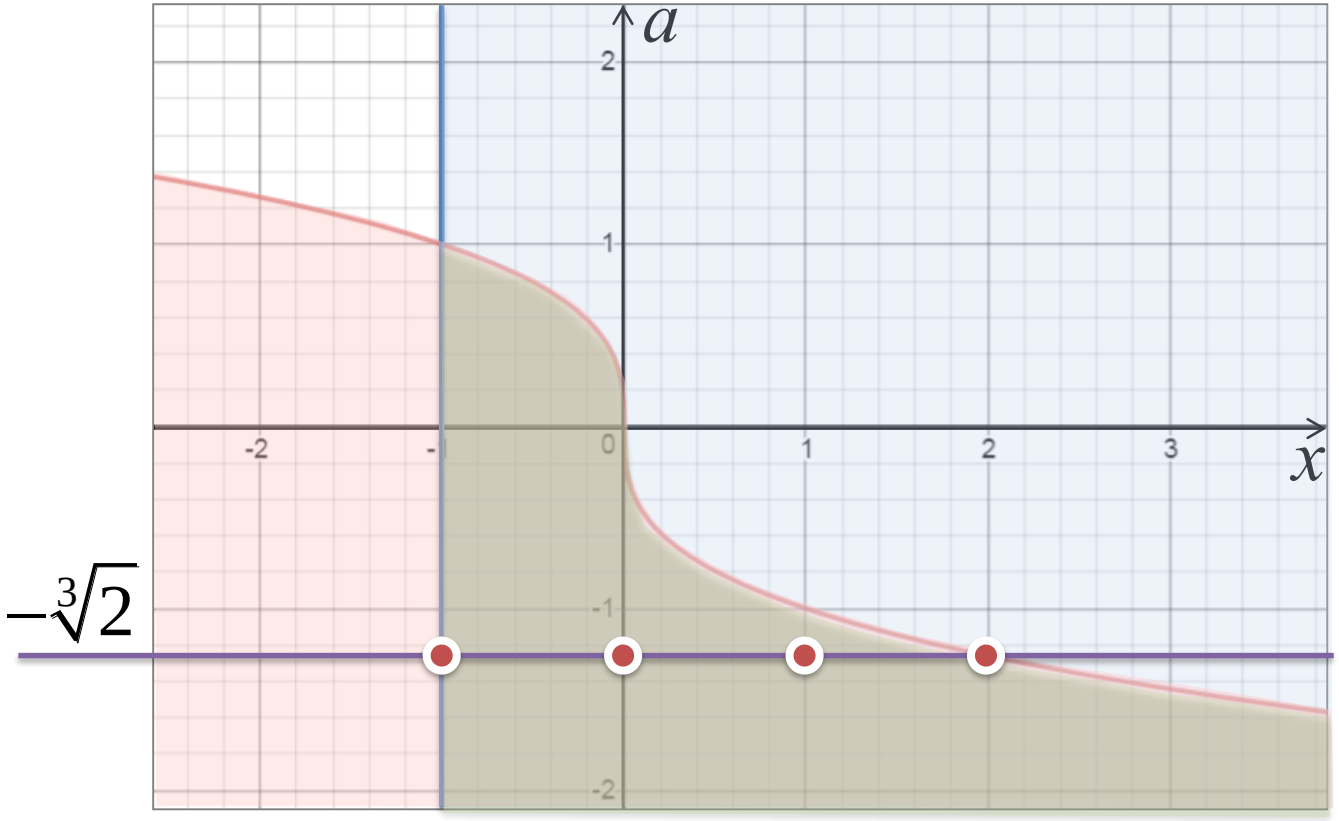
Решим графически в системе *xoa:* $\begin{cases} x\ge -1, \\ a\le -\sqrt[3]{x}; \end{cases}$

Подготовка к ЕГЭ

Пример №6

Решение: Решим графически в системе xoa:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ a \leq -\sqrt[3]{x}; \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt[3]{2}\right]$

Спасибо за внимание!

Успешной сдачи экзаменов!