Методы решений уравнений в 9 классе

ЛНИП г . Королев

Павлова Светлана Алексеевна

Решить уравнение – значит найти его корни или доказать, что их нет.

Теорема. Уравнение n-й степени имеет не более n действительных корней.

Разложение на множители

Один из приемов решения уравнений вида $P_n(x)=0$, где $n>2$, состоит в разложении многочлена на множители.

Этот метод удобен, когда в правой части уравнения стоит ноль, а в левой – выражение, зависящее от переменной.

Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла.

Для разложения многочлена на множители мы используем такие способы как вынесение общего множителя, группировку, формулы сокращенного умножения, деление многочлена на многочлен.

Разложение на множители

1. Решите уравнение $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

Разложим левую часть уравнения на множители. Сгруппируем слагаемые и применим формулу $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$$(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) - 3x(x+2) = 0$$

$$(x+2)\left(x^2 - 2x + 4 - 3x\right) = 0$$

$$(x+2)\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0.$$

Ответ: -2; 1; 4.

2. $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Решение: $27x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ Применим формулы: куб суммы ; сумма кубов.

$27x^3 + (x+1)^3 = 0$

$(3x+x+1)(9x^2-3x(x+1)+(x+1)^2)=0$

$(4x+1)(9x^2-3x^2-3x+x^2+2x+1)=0$

$(4x+1)(7x2-x+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} 4x+1=0 \\ 7x2-x+1=0 \end{array}\right.$$

Ответ: - 0,25

3. $(x^2+4x)(x^2+x-6)=(x^3-9x)(x^2+2x-8)$

Решение: $x(x+4)(x+3)(x-2) - x(x+3)(x-3)(x+4)(x-2)=0$

$x(x+4)(x+3)(x-2)(1-x+3)=0$

Ответ: -4; -3; 0; 2; 4

4.

- 2

Применим формулу «квадрат разности»

= 0

= 0

$x^2 = 0$

$x^2 = 0$

Ответ: -2; 0.

Разложение на множители

Рассмотрим еще один прием разложения многочлена на множители, который опирается на теорему Безу.

Теорема Безу. Остаток R от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x – a)$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$, т.е. $R= P_n(a)$.

$$P_n(x) = (x – a)\ Q_{n-1}(x) +P_n(a)\ .$$

Если число a является корнем многочлена $P_n(x)$, то $P_n(a) = 0$ и тогда данный многочлен можно представить в виде $P_n(x) = (x – a)Q_{n-1}(x)$

Разложение на множители

5. Решите уравнение: $6x^3 - x^2 + 2x - 7 = 0$.

Задача решения уравнения сводится к нахождению корня многочлена. Тогда можно разложить данный многочлен на множители, степени которых будут 1 и n-1.

Обратимся еще к оной теореме.

Теорема. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором все коэффициенты – целые числа, причем $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

Очевидно, что 1 является корнем. Значит многочлен $6x^3 - x^2 + 2x - 7$ делится на двучлен (x-1).

Удобный способ деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен (x – a) ввел английский математик Уильям Джордж Горнер. Необходимо заполнить специальную таблицу:

Разложение на множители

5. Решите уравнение: $6x^3 - x^2 + 2x - 7 = 0$.

Схема Горнера.

Коэффициенты по степеням		6	-1	2	-7
Значение а	1				

1) Первый коэффициент 6 переносим в нижнюю строку.

2) $1 \cdot 6 + (-1) = 5$

3) $1 \cdot 5 + 2 = 7$

4) $1 \cdot 7 + (-7) = 0$

Коэффициенты по степеням		6	-1	2	-7
Значение а	1	6	5	7	0

$(x - 1)(6x^2 + 5x + 7) = 0$

Квадратное уравнение $6x^2 + 5x + 7 = 0$ корней не имеет.

Ответ: 1

Разложение на множители

6. Решите уравнение: $\mathbf{x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0}$

Делители свободного члена :– 2; –1 ;1; 2. Очевидно 1-корень. Применим схему Горнера.

Коэффициенты по степеням		1	–1	–4	5	1	–2	
Значение a	**1**	1	0	–4	1	2	0	$(x-1)\cdot(x^4-4x^2+x+2)=0$

1 является корнем уравнения $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0$. Продолжим заполнять таблицу.

	1	–1	–4	5	1	–2	
1	1	0	–4	1	2	0	$(x-1)\cdot(x^4-4x^2+x+2)=0$
1	1	1	–3	–2	0		$(x-1)^2(x^3+x^2-3x-2)=0$

-2 является корнем уравнения $x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$. Продолжим заполнять таблицу.

	1	–1	–4	5	1	–2	
1	1	0	–4	1	2	0	$(x-1)(x^4-4x^2+x+2)=0$
1	1	1	–3	–2	0		$(x-1)^2(x^3+x^2-3x-2)=0$
–2	1	–1	–1	0			$(x-1)^2(x+2)(x^2-x-1)=0$

Разложение на множители

6. Решите уравнение: $\mathbf{x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0}$

$(x-1)^2(x+2)(x^2-x-1)=0$ Решая квадратное уравнение $x^2-x-1=0$, находим еще два корня:

Ответ:

Разложение на множители

Теорема. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором все коэффициенты – целые числа, причем $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q}$ - несократимая дробь), то p является делителем свободного члена, а q является делителем старшего коэффициента.

Решить уравнение: $30x^3 - 19x^2 + 1 = 0$.

Числа 1 и -1 очевидно не являются корнями уравнения. Тогда составим несократимые дроби числители которых – делители свободного числа (±1), а знаменатели – делители старшего коэффициента (±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15, ±30). ±±±±±±±±

	30	–19	0	1	
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	30	-4	2	0	$(x-1/2)(30x^2 - 4x + 2) = 0$

Ответ:

Введение новой переменной

I. Понижение степени уравнения.

1) $25x^4+66x^2-27=0;$ Вводим замену $t = x^2$ и решаем квадратное уравнение.
$25t^2 + 66t - 27 = 0$

2) $27x^6-215x^3-8=0.$ Вводим замену $t = x^3$ и решаем квадратное уравнение
$27t^2 - 215t - 8 = 0$

3) $(x^2-3x)^2-14x^2+42x+40=0;$ Замена $t = x^2 - 3x$ приводит к квадратному уравнению
$t^2 - 14t + 40 = 0$

4) $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0;$ Замена $t = 2x^2 + 3x - 1$ приводит к квадратному уравнению
$t^2 - 5t + 4 = 0$

Введение новой переменной

II. Уравнение четвертой степени вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$,
где $a + b = c + d$, или $a + c = b + d$, или $a + d = b + c$.

Решить уравнение: $(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40$

Перемножив первую скобку с третьей и вторую скобку с четвертой, получим уравнение
$(x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 4) = 40$
Введем замену: $t = x^2 - 5x$, получим уравнение $(t - 14)(t + 4) = 40$,

$$t^2 - 10t - 96 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 16 \\ t = -6 \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, решим совокупность уравнений:

$x^2 - 5x = -6$	$x^2 - 5x = 16$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$x^2 - 5x - 16 = 0$
$x = 2$; $x = 3$	$x = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}$

Ответ: 2; 3; $\frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}$

Введение новой переменной

III. Уравнение вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = Ex^2$,

где $ab = cd$, или $ac = bd$, или $ad = bc$.

Решить уравнение: $(x - 1)(x - 2)(x - 8)(x - 4) = 4x^2$

Перемножим первую скобку с третьей и вторую с четвертой и запишем уравнение

$(x^2 - 9x + 8)(x^2 - 6x + 8) = 4x^2$.

Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, разделим обе части уравнения на x^2

$(x-9+\frac{8}{x})(x-6+\frac{8}{x})=4$ Выполняя замену $t = x +$, получим квадратное уравнение

$(t - 9)(t - 6) = 4$,

$t^2 - 15t + 50 = 0$

$t = 10$, $t = 5$

Вернемся к исходной переменной.

Введение новой переменной

$x + \frac{8}{x} = 10$

$x^2 - 10x + 8 = 0$

$x = 5 +$, $x = 5 -$

Ответ: 5 + , 5 -

$x + \frac{8}{x} = 5$

$x^2 - 5x + 8 = 0$

Корней не имеет

Введение новой переменной

IV.Уравнения вида: $\dfrac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} \pm \dfrac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c} = E$

Решить уравнение. $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \dfrac{3x}{x^2-8x+15}$

Проверим, что 0 не является корнем уравнения.
Делим числитель и знаменатель каждой дроби на x (x≠ 0), получим:

$$\dfrac{x-10+\dfrac{15}{x}}{x-6+\dfrac{15}{x}} = \dfrac{3}{x-8+\dfrac{15}{x}}$$

Выполняя замену t = x + , получим уравнение =

Находит корни : t = 7, t = 14

x + x + = 14

$x^2 - 7x + 15 = 0$ $x^2 - 14x + 15 = 0$

Нет корней. x = 7 ±

Ответ: 7 ±

Введение новой переменной

V. Уравнения вида: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Уравнение этого вида можно свести к биквадратному уравнению с помощью замены переменной $y = \dfrac{(x+a)+(x+b)}{2}$ т.е. $y = x + \dfrac{a+b}{2}$

Решить уравнение: $(x - 1)^4 + (x + 3)^4 = 82$

Обозначим $y = \dfrac{x-1+x+3}{2}$ т. е. $y = x + 1$, или $x = y – 1$.

Тогда уравнение примет вид: $(y - 2)^4 + (y + 2)^4 = 82$

Применяя формулу $(a\ b)^4 = a^4\ \ 4a^3b + 6a^2b^2\ \ 4ab^3 + b^4$, получим $2y^4 + 48y^2 + 32 = 82$.

$y^4 + 24y^2 - 25 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = -25, \\ y^2 = 1; \end{array}\right.$$

$y = \ 1$, тогда $x = 0;\ – 2$

Ответ: -2; 0.

Введение новой переменной

VI. Возвратные уравнения

Определение. Уравнение с целыми степенями относительно неизвестного называется возвратным, если его коэффициенты, равноотстоящие от концов левой части, равны между собой, т.е. уравнение вида $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$

Возвратное уравнение нечетной степени $ax^{2n+1} + bx^{2n} + cx^{2n-1} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$
всегда имеет корень $x = -1$.
Поэтому оно эквивалентно объединению уравнению $x + 1 = 0$ и $\alpha x^{2n} + \beta x^{2n-1} + \ldots + \beta x + \alpha = 0$.
Последнее уравнение является возвратным уравнением четной степени.

Таким образом, решение возвратных уравнений любой степени сводится к решению возвратного уравнения четной степени.

Введение новой переменной

Решить уравнение: $x^7 + x^6 – 5x^5 – 13x^4 – 13x^3 – 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

$x = – 1$ является корнем уравнения. Применим схему Горнера.
Наше уравнение примет вид: $(x + 1)(x^6 + x^5 – 6x^4 – 7x^3 – 6x^2 + x + 1) = 0$

1) $x + 1 = 0$, $x = -1$;
2) $x^6 + x^5 – 6x^4 – 7x^3 – 6x^2 + x + 1 = 0$
Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения. Тогда делим обе части уравнения на x^3, где $x^3 \neq 0$; Получим $x^3 + x^2 - 6x - 7 - + + = 0$

Группируя, получим:

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) - 6(x + \frac{1}{x}) - 7 = 0$$

Введение новой переменной

Решить уравнение: $x^7 + x^6 – 5x^5 – 13x^4 – 13x^3 – 5x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^2+\frac{1}{x^2})-6(x+\frac{1}{x})-7=0$$

Вводим замену: t=x+ Тогда t^2= x^2+ + 2, x^2+ = t^2-2.

t^3= x^3 +3x+ + ; x^3+= t^3 -3(x+)= t^3 - 3t

Получим уравнение: $t^3 – 3t + t^2 – 2 – 6t – 7 = 0$;

$t^3 + t^2 – 9t– 9 = 0$ $\quad (t + 1)(t^2 – 9)=0$ $\quad t = -1,\ t = \pm 3.$

Решая уравнения $\quad (x+\frac{1}{x})=-1 \quad (x+\frac{1}{x})=-3 \quad (x+\frac{1}{x})=3$

Получим корни $\quad x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: -1, $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\quad \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Введение новой переменной

Обобщенное возвратное уравнение 4-ой степени

Решить уравнение: $3x^4 – 2x^3 – 31x^2+10x+75=0$ $= 5$

$x = 0$ не является корнем уравнения. Тогда делим обе части уравнения на x^2, где $x^2 \neq 0$;
Получим $3x^2$ - $2x$ - 31 + + $= 0$
$3(x^2$ +) - $2(x$ -) - $31 = 0$

Вводим замену: $t=x$ - Тогда $t^2= x^2 +$ - 10, $x^2 + = t^2 + 10$.
Получим уравнение: $3t^2 + 30 – 2t - 31 = 0$; $3t^2– 2t - 1 = 0$; $t = 1$, $t = -$

Решая уравнения x -, получаем ответ

Ответ:

Введение новой переменной

VII. Однородные уравнения

Определение. Уравнение вида P(u,v)=0 называется однородным уравнением степени k относительно u и v, если P(u,v) – однородный многочлен степени k, и степень каждого его члена равна одному и тому же числу k.

Решить уравнение: $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)\cdot(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0$

Тогда делим обе части уравнения на $(x^2+1)^2$, где $(x^2+1)^2 \neq 0$ при любом значении x.

+5+2=0

Вводим замену: t =

Получим уравнение: $2t^2 + 5t + 2= 0$; t = -2, t= -

Решая уравнения = - 2; = - получим корни первоначального уравнения

Ответ:

Метод оценки

Решить уравнение: $(x-3)^6+2 = 4x-x^2-2$

Преобразуем правую часть уравнения:

$$4x - x^2 - x = -(x^2 - 4x + 4) + 2 = -(x-2)^2 + 2.$$

Уравнение примет вид:

$$(x-3)^6 + 2 = 2 - (x-2)^2;$$

$(x-3)^6 = -(x-2)^2.$ Оценим левую и правую части уравнения.

Так как $(x-3)^6 \geqslant 0, -(x-2)^2 \leqslant 0,$ то равенство выполняется, только если и левая, и правая его части равны нулю.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-3)^6 = 0 \\ -(x-2)^2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Ответ:

Метод оценки

Решить уравнение: $(4-x)^8+(3x^2-48)^6+(2x^2-6x-8)^4=0$

Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, если каждое из них равно нулю.

$\Leftrightarrow$

Ответ:

Задания для самостоятельного решения

1) $3x^3 - 2x - 20 = 0$
2) $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$
3) $3x^3 - x^2 - 12x + 4 = 0$
4) $6x^3 - 11x^2 - 2x + 8 = 0$
5)
6) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$
7) $(x^2 - 5x - 4)^2 - 3(x^3 - 5x^2 - 4x) + 2x^2 = 0$
8) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$
9) $7(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = 144$
10) $(x + 3)(x + 1)(x + 5)(x + 7) = -16$
11) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0;$
12) $(x - 4)(x + 5)(x + 10)(x - 2) = 18x^2$
13) $(x + 6)(x + 3)(x - 1)(x - 2) - 12x^2 = 0$
14) $(x^2 - 5x - 4)^2 - 3(x^3 - 5x^2 - 4x) + 2x^2 = 0$
15) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$
16) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$
17) $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0$
18) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 15x + 50 = 0$
19) $8x^4 - 42x^3 + 29x^2 + 42x + 8 = 0$
20) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 - 10x + 24 = 0$
21) $2(x-1)^4 - 5(x^2 - 3x + 2)^2 + 2(x-2)^4 = 0$
22) $(x-3)^4 + (x^2 - 2x - 3)^{10} = 0$
23) $\dfrac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{3x}{x^2 - 8x + 15}$
24) $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 7x + 4} + \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4} + \dfrac{13}{3} = 0$
25) $6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 38 = 0$
26) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + 10 = 0$
27) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$
28) $3(x + 2)^2 + 2(x^2 - 2x + 4)^2 = 5(x^3 + 8)$

Литература

1. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков «Алгебра. Учебник для 9 класса с углубленным изучением математики»
2. Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А. И. Кудрявцев «Алгебра. Учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики»
3. М. Л. Галицкий, А.М, Гольдман, Л.И. Звавич «Сборник задач по алгебре 8-9 класс»
4. Шабунин М.И., А.А. Прокофьев «Задачник. Математика. Алгебра. Начала математического анализа 10-11 класс. Профильный уровень».
5. С.В. Шестаков, И.Р. Высоцкий, Л.И. Звавич «Сборник задач 9 класс»