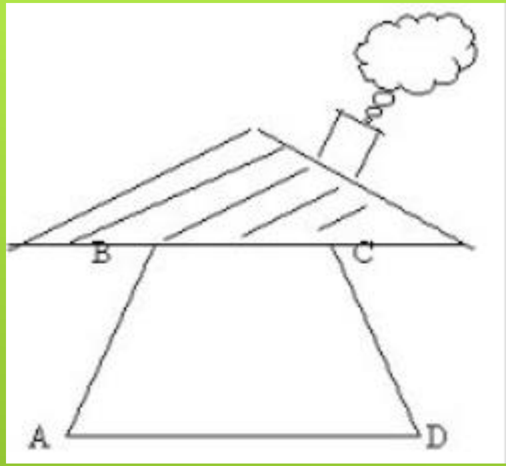
ТРАПЕЦИЯ. ОБОБЩЕНИЕ.

Родионова Елена Юрьевна.

Г А О У М О « Л Н И П »
КОРОЛЁВ 2023г.

Трапеция

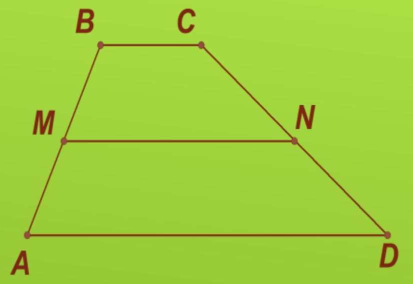
Если влезть с пилой повыше,
Отпилить у дома крышу,
То хозяев мы обидим,
Но трапецию увидим!
А потом мы все починим
И из шкафа юбку вынем.
Мы увидим: юбка тоже
На трапецию похожа!



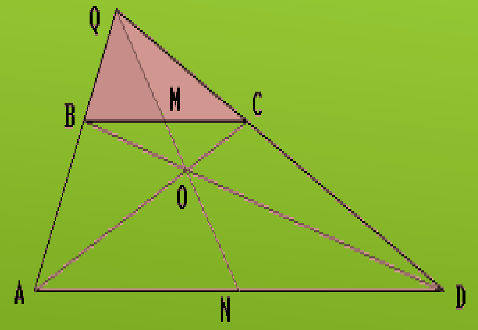
Трапе́ция выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.
Параллельные противоположные стороны называются основаниями трапеции, а две другие — боковыми сторонами.

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

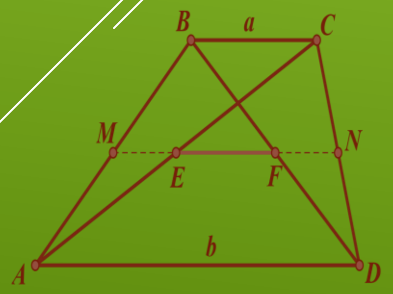
НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ.



1.Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

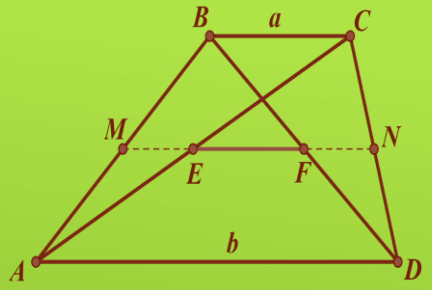


2. Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

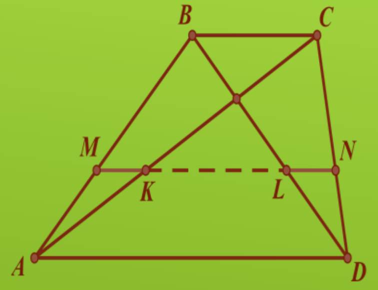


3. В трапеции середины диагоналей и середины боковых сторон лежат на одной прямой.

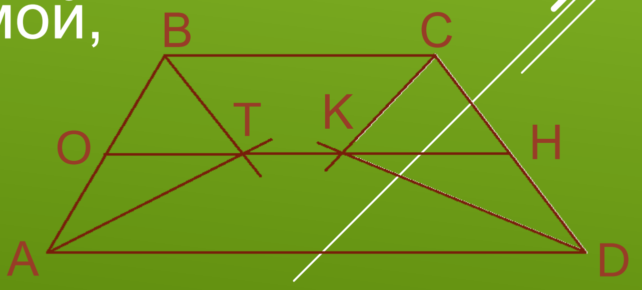
4. Длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции равна половине разности оснований.



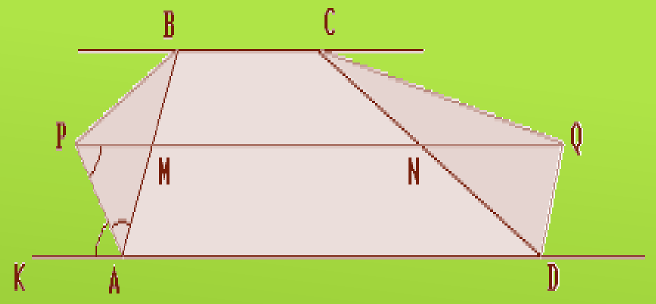
5. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.



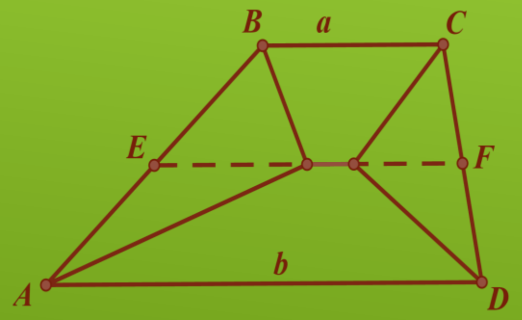
6.Точки пересечения биссектрис внутренних и внешних углов при боковых сторонах трапеции лежат на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.



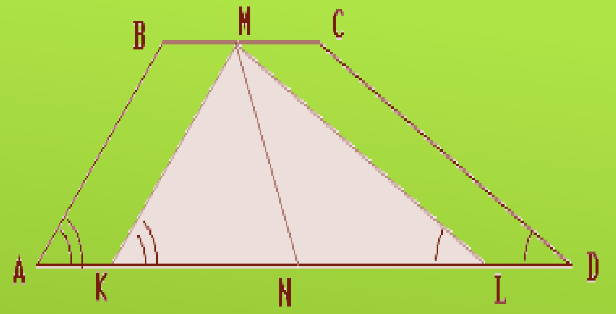
7.Длина отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис внешних углов при боковых сторонах трапеции равна полупериметру.



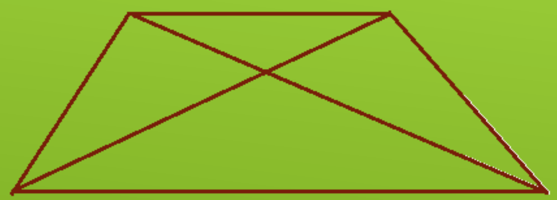
8. Длина отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис внутренних углов при боковых сторонах трапеции равна половине разности между суммой оснований и суммой боковых сторон трапеции (или наоборот).



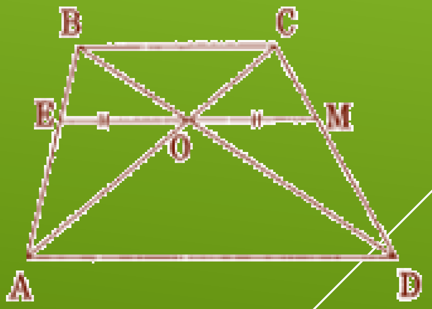
9. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90º, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен полуразности оснований.



10.Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Два из них подобны (прилежащие к основаниям), а два других равновелики.



11.Точка пересечения диагоналей трапеции является серединой отрезка, проходящего через эту точку, параллельно основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции.



ВИДЫ ТРАПЕЦИЙ.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной** трапецией (или **равнобокой** трапецией).

Трапеция, имеющая прямые углы при одной из боковых сторон, называется **прямоугольной**.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ.

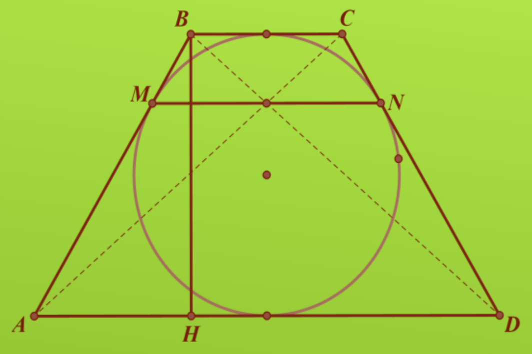
12.В равнобедренной трапеции равны диагонали и углы при основаниях.

13.Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали - полусумме оснований.

14.Если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то высота трапеции равна полусумме оснований.

15.Трапеция вписана в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

16.Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то отрезок, соединяющий точки касания окружности с боковыми сторонами проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.



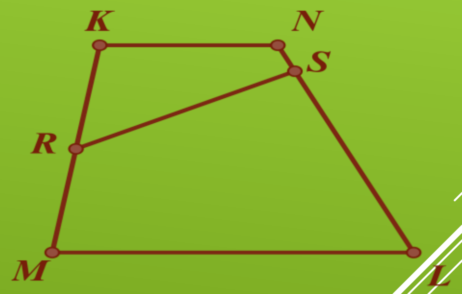
17.Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то ее боковая сторона равна средней линии.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТРАПЕЦИИ.

1.Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований (или средней линии) на высоту трапеции.

2.Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований.

3.Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведенный из середины второй боковой стороны на первую.

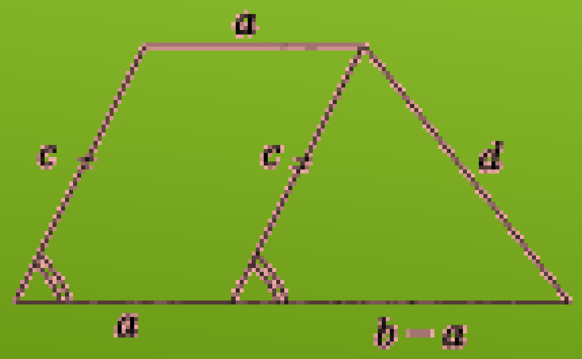


4.Высота равнобокой трапеции, в которую можно вписать окружность, есть среднее геометрическое оснований трапеции .

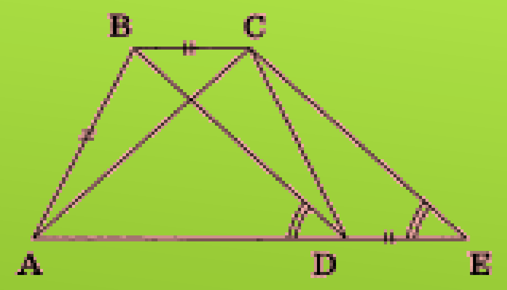
ТРАПЕЦИЯ В ЗАДАЧАХ.

Основные дополнительные построения
в задачах с трапециями.

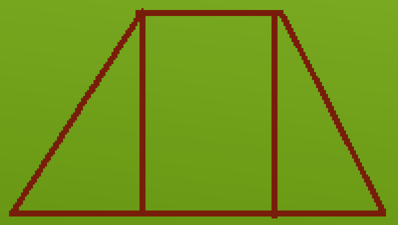
1.Через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне до пересечения с большим основанием.
Трапеция разбивается на параллелограмм и треугольник.



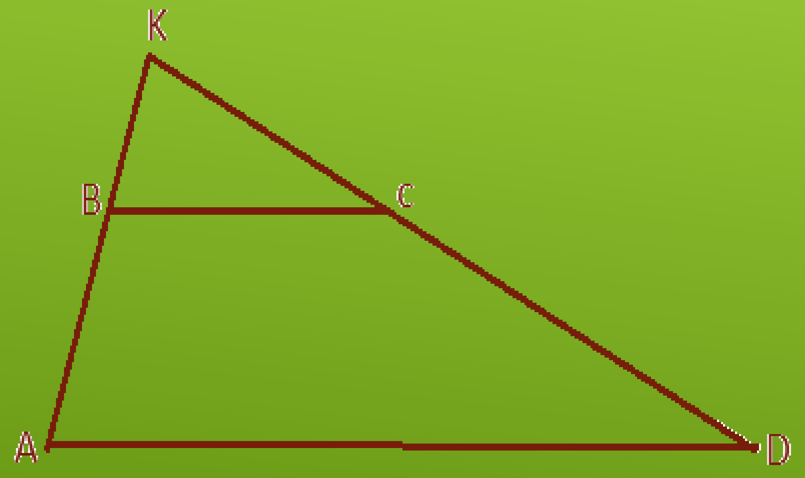
2.Через вершину меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали до пересечения с прямой, содержащей большее снование.
Образуется треугольник, стороны которого равны диагоналям трапеции, а основание равно сумме оснований трапеции.
Площадь трапеции равна площади этого треугольника.



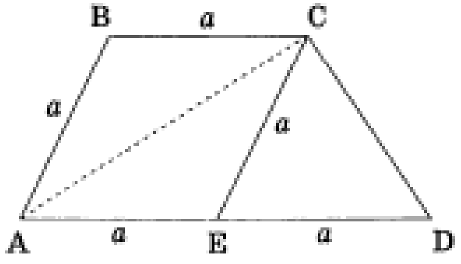
3. Из вершин меньшего основания трапеции опустить две высоты.
Образуются два прямоугольных треугольника, у каждого из которых один катет равен высоте трапеции
и на большем основании выделяется отрезок,
равный меньшему основанию.



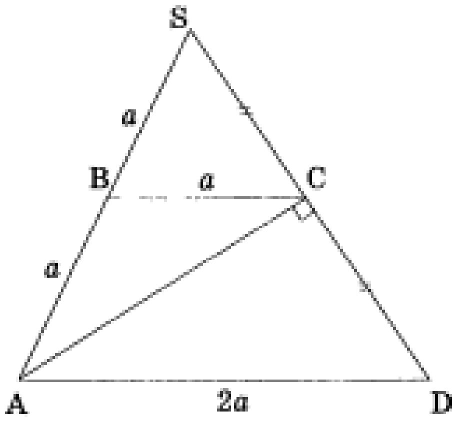
4.Достраивание трапеции до треугольника, вершина которого образуется при пересечении продолжений боковых сторон.
Образуются подобные треугольники.



Задача 1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отношение сторон равно $AB : BC : AD = 1 : 1 : 2$. Определить величину угла ACD.



Решение 1. Из вершины C проведём прямую $CE \parallel AB$ до пересечения с AD в точке E (построение 1). Обозначим для удобства $AB = a$, тогда по условию $BC = a$, $AD = 2a$. Кроме того, из построения следует, что $CE = a$, $AE = a$, а потому и $ED = a$. В результате мы получили, что в ΔACD точка E равноудалена от всех его вершин, т.е. она является центром описанной окружности. А так как E принадлежит AD, то ΔACD — прямоугольный, $\angle ACD = 90°$.

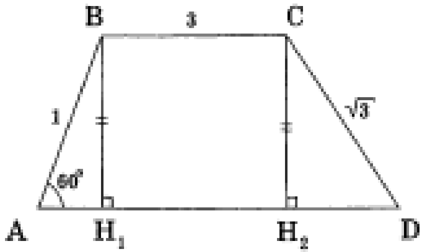


Решение 2. Тот же результат можно получить, достроив трапецию до треугольника ASD (построение 4). Тогда BC в этом треугольнике будет средней линией, следовательно, $AS = 2AB = 2a$. Но это означает, что ΔASD — равнобедренный ($AS = AD = 2a$), в котором AC — медиана, а значит, и высота.

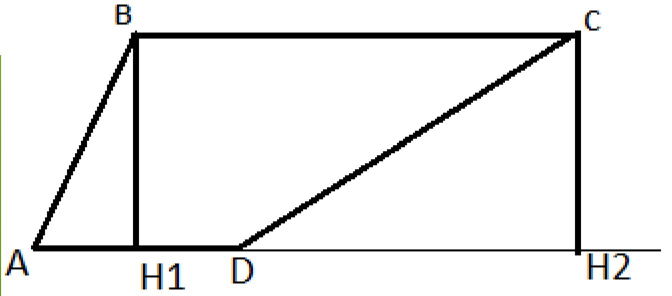
Ответ: $90°$.

Задача 2. В трапеции ABCD угол BAD при основании AD равен 60^0, AB=1, BC=3, CD=$\sqrt{3}$. Найдите AD.

Решение 1. Из вершин B и C трапеции проведем её высоты $BH_1 = CH_2$ (построение 3). Тогда из соотношений в прямоугольном ΔABH_1 получим $AH_1 = AB\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $BH_1 = AB\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $BH_1 = CH_2$, из прямоугольного ΔCDH_2 по теореме Пифагора найдем $H_2D = \frac{3}{2}$. Кроме того, так как $H_1H_2 = BC = 3$, получим искомое $AD = AH_1 + H_1H_2 + H_2D = 5$.



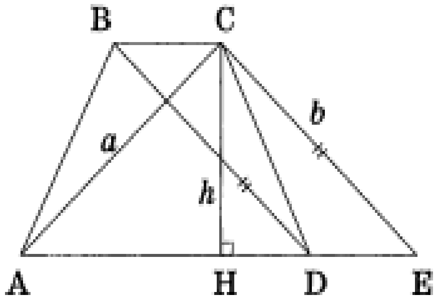
Если угол ADC тупой, то $AD = AH_1 + H_1H_2 - H_2D = 2$.



Ответ: 5 или 2.

Задача 3. Найти площадь трапеции с острыми углами при большем основании, зная длины её диагоналей a, b и длину высоты h.

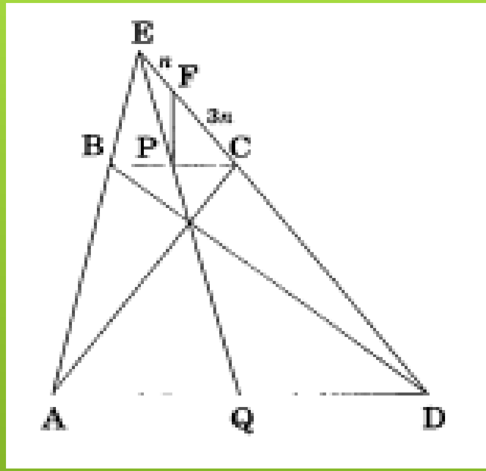
Решение 1. Проведя CE параллельно диагонали BD (построение 2) и учитывая, что $S_{ABCD} = S_{ACE}$, сведём задачу к вычислению площади треугольника ACE со сторонами a, b и высотой h (обозначим ее CH). Для её решения достаточно дважды применить теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках ACH и CHE с целью определения их катетов AH и HE.



Ответ: $S = h(\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}) / 2.$

Задача 4

Площадь трапеции $ABCD$ равна 6. Пусть точка E — точка пересечения продолжений боковых сторон этой трапеции. Через точку E и точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая пересекает меньшее основание BC в точке P, а большее основание AD — в точке Q. Точка F лежит на отрезке EC, причем $EF : FC = EP : EQ = 1 : 3$. Найти площадь треугольника EPF.



1) EP и EQ — медианы в треугольниках

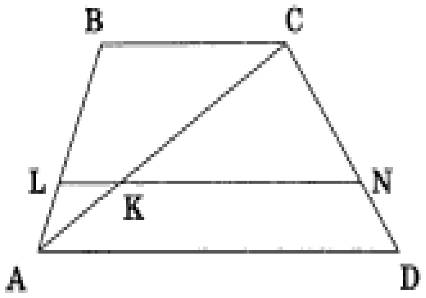
2) $\Delta EBC \sim \Delta EAD$, $k = EP : EQ = 1 : 3 \Rightarrow$
$\frac{S_{EBC}}{S_{EAD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Обозначим $S_{EBC} = x$. Тогда
$\frac{x}{x+6} = \frac{1}{9}$ или $x = 3/4$.

3) $S_{EPC} = \frac{x}{2} = \frac{3}{8}$ (медиана EP делит ΔEBC на два равновеликих).

4) $EF : FC = 1 : 3 \Rightarrow S_{EPF} : S_{EPC} = 1 : 4$ (у треугольников EPF и EPC общая высота) $\Rightarrow S_{EPF} = \frac{3}{32}$.

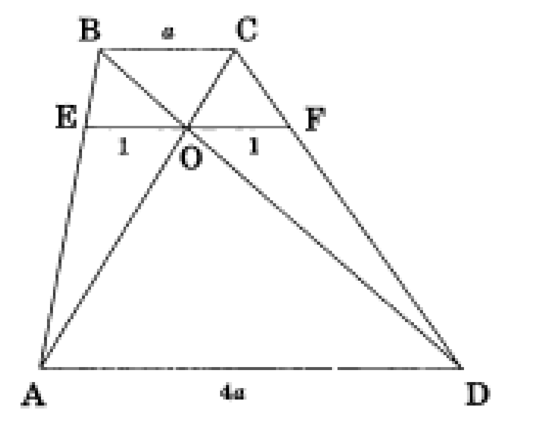
Ответ: 3/32.

2. *Если в трапеции ABCD провести диагональ AC и произвольную прямую, параллельную основаниям, пересекающую боковые стороны трапеции в точках L и N, а AC — в точке K, то образованные при этом две пары подобных треугольников $\Delta ALK \sim \Delta ABC$ и $\Delta CKN \sim \Delta CAD$ будут иметь коэффициенты подобия, сумма которых равна единице.*



Задача 5. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F . Длина отрезка EF равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

Решение. Обозначим точку пересечения диагоналей трапеции через O, длины оснований $BC = a$, $AD = 4a$. Тогда из свойства 1 следует, что $EO = OF = 1$. А из свойства 2, учитывая, что $\frac{AO}{AC} = \frac{1}{a}$ и $\frac{CO}{AC} = \frac{1}{4a}$, получаем $\frac{1}{a} + \frac{1}{4a} = 1$, откуда $a = \frac{5}{4}$.

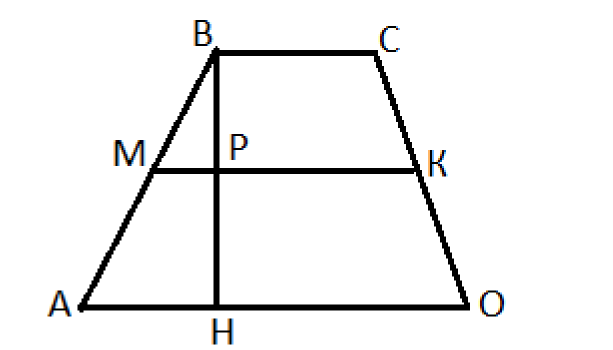


Ответ: 5/4; 5.

Задача 6 . Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Средняя линия трапеции делит ее на две части, площади которых относятся, как 5:11.
Найдите длины оснований трапеции, если в нее можно вписать окружность.

Решение. Так как в трапецию можно вписать окружность, сумма длин её оснований равна сумме длин боковых сторон, т.е. 16. Тогда длина средней линии трапеции равна 8. Средняя линия делит трапецию на две другие трапеции с равными высотами, следовательно, отношение их площадей равно отношению соответствующих сумм длин оснований каждой из них.

Обозначив через x длину меньшего основания заданной в условии трапеции, получим, что длина её большего основания равна $(16-x)$, а отношение площадей вновь образованных двух трапеций равно $\frac{8+x}{8+(16-x)}=\frac{5}{11}$. Откуда $x=2$. Соответственно длина большего основания исходной трапеции равна 14. **Ответ:** 2; 14.



Задача 7.

В трапеции ABCD: AD и BC основания, $\angle A=90^0$, $\angle D=75^0$. Из вершины A на CDопущен перпендикуляр AH, основание которого лежит на отрезке CD. Оказалось, что HD=BC, AH+AB=12. Найдите площадь трапеции ABCD.

Литература:

1. Р.К.Гордин «Планиметрия. Задачник 7-9 классы.»
2. М.В.Лурье «Геометрия. Техника решения задач.»
3. А.С.Зеленский; И.И.Панфилов «Геометрия в задачах»
4.Е.В.Потоскуев «Решение разноуровневых задач по геометрии.»
5.М.А.Волчкевич «Уроки геометрии в задачах.»